

САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА



**РЕШЕНИЯ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ
ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ SAMRAS-2013
СРЕДИ УЧАЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ
ЗАОЧНОГО ТУРА № 2**

Задачи подготовил:

Филиппов Юрий Петрович,
научный руководитель школы,
старший преподаватель кафедры
общей и теоретической физики
Самарского государственного
университета, к.ф.-м.н.

Самара, 2013 г.

Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Движение звезды по небосводу»

Условие. По какому кругу небесной сферы движется звезда, описывающая видимую дугу мерой $= 180^\circ$. В каких точках горизонта она восходит и заходит? Укажите данный круг и точки на небесной сфере (сделайте рисунок). Какой промежуток времени она пребывает над горизонтом? (2 балла).

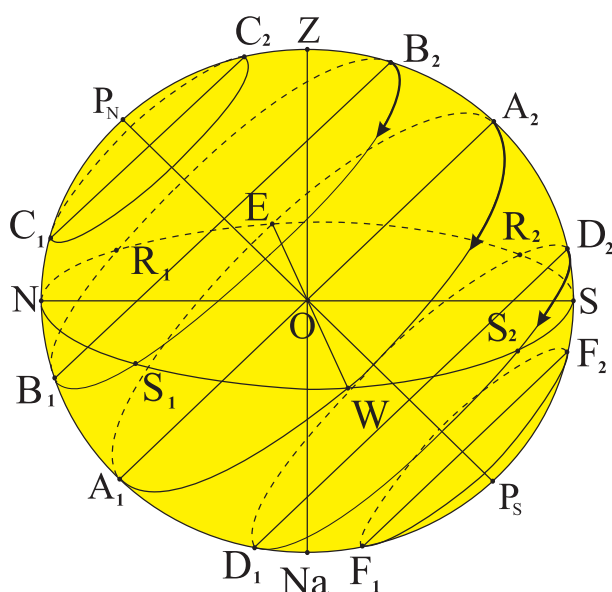
Решение:

Рис. 1. К определению суточного вращения н.с.

В суточном движении все небесные тела движутся по суточным параллелям. Из рис. 1 видно, что если тело расположено выше небесного экватора, то большая часть дуги его суточной параллели находится над горизонтом, в противном случае – меньшая часть, и только для звезд, движущихся по небесному экватору – WA_1EA_2 , половина дуги их круга находится над горизонтом (т.е. дуга с раствором в 180°). Такие звезды восходят в точке востока E и заходят за горизонт в точке запада – W . Учитывая, что Земля (а следовательно и небесная сфера) совершают один полный оборот за 23 ч аса 56 минут и 4 секунды, то звезда будет пребывать над горизонтом 11 часов 58 минут и 2 секунды или совсем грубо 12 часов.

Ответ: небесный экватор; точки востока и запада; 11 часов 58 минут и 2 секунды (грубая оценка – 12 часов). ($S_{\max} = 2$ балла).

Задача № 2. «Астеризм «Большая Медведица» – небесный комас»

Условие. На представленной фотографии астеризма «Большая Медведица» (см. рис. 2) укажите направления (нарисуйте на копии астеризма стрелками направления), в которых следует двигаться новичку, чтобы отыскать на небосводе а) Полярную звезду, б) Изар. В каких созвездиях находятся указанные небесные тела? Какие их основные особенности Вы знаете? (3 балла).

Решение:

Полярная звезда (α Малой Медведицы) – звезда $+2.0^m$ звездной величины в созвездии Малой Медведицы, расположенная вблизи Северного полюса мира. Это сверхгигант спектрального класса F7I. Расстояние до Земли – 434 световых года. Полярная звезда является ярчайшей и ближайшей к Земле пульсирующей переменной звездой типа дельта Цефея с периодом 3.97 дня.

В настоящую эпоху Полярная находится менее чем в 1° от Северного полюса мира, и поэтому почти неподвижна при суточном вращении звездного неба. Она очень удобна для ориентирования: *направление на нее практически совпадает с направлением на север, а высота над горизонтом равна географической широте места наблюдения.*

Полярная звезда на самом деле представляет собой тройную звездную систему. В центре системы располагается сверхгигант Полярная А (α UMi A), в 2000 раз превосходящий по яркости наше Солнце и в 4.5 раза по массе. Полярная В (α UMi B) массой 1.39 массы Солнца расположена на приличном удалении от Полярной А, поэтому разглядеть ее в телескопы нетрудно даже с поверхности Земли. В 1929 году при изучении спектра Полярной было выявлено, что Альфа Малой Медведицы является близкой двойной звездой.

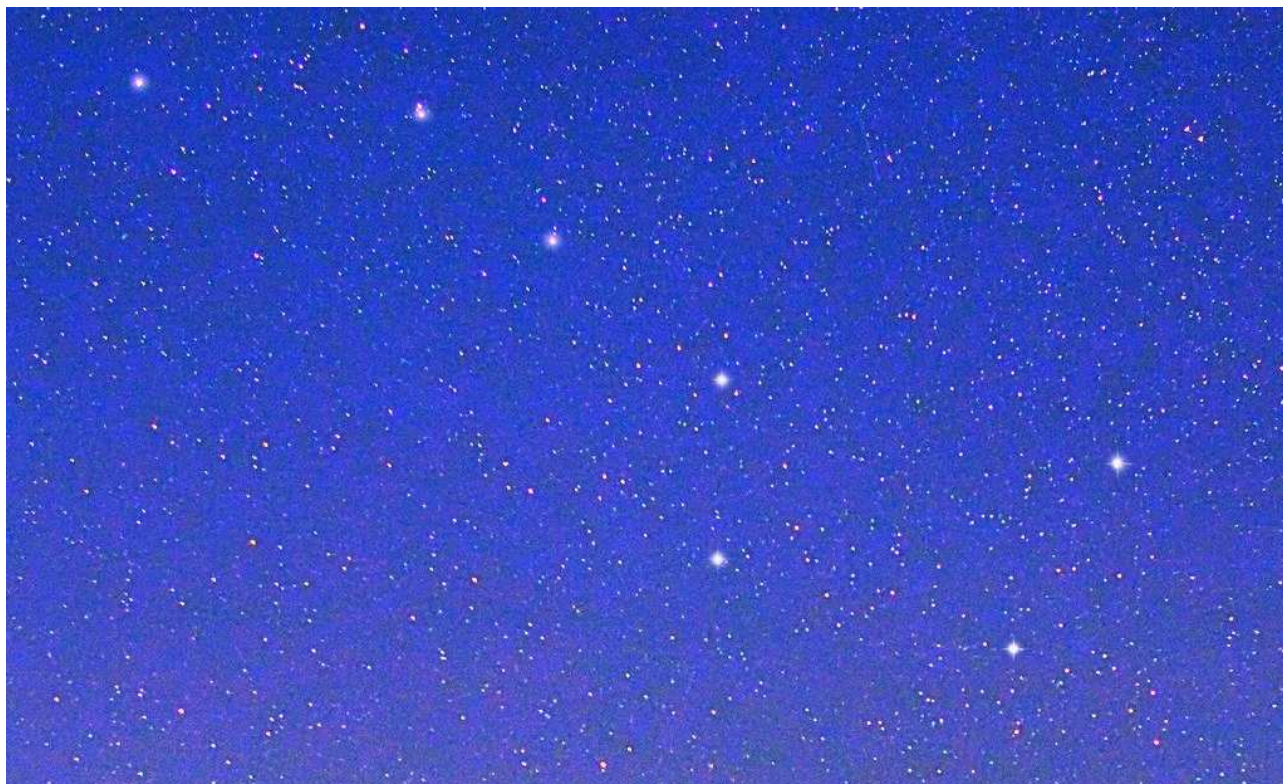


Рис. 2.

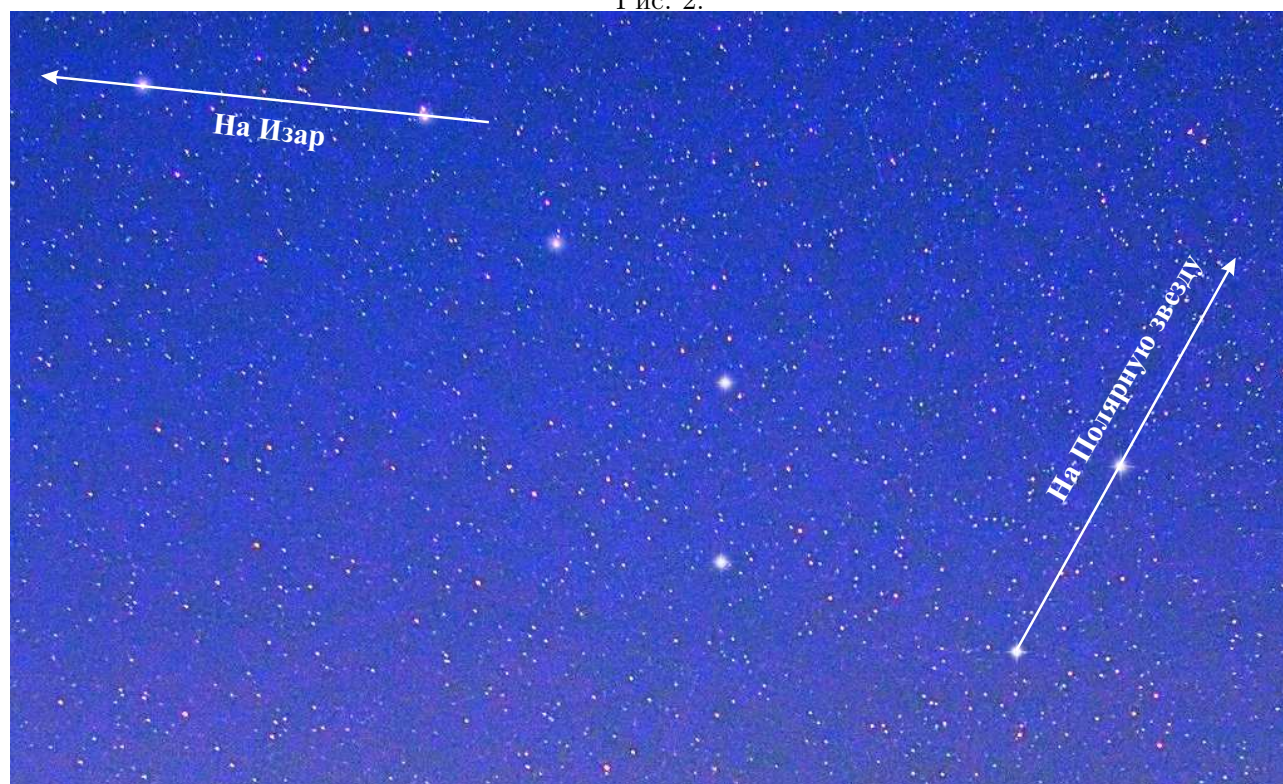


Рис. 3.

Чтобы найти Полярную звезду, надо сначала найти характерную конфигурацию из семи ярких звезд – астеризм "Большой ковш" созвездия Большой Медведицы, затем через две звезды (Дубхе и Мерак) "стенки"ковша, противоположной "ручке", мысленно провести линию (см. рис. 3), на которой отложить пять раз расстояние между этими крайними звездами. Примерно в конце этой линии находится Полярная звезда.

Изар (ϵ Волопаса) – кратная система в созвездии Волопаса с звездной величиной $+2.3^m$. ϵ Волопаса А – оранжевый яркий гигант, имеющий звездную величину $+2.7^m$ и спектральный

класс K0; ϵ Волопаса В – белая звезда главной последовательности спектрального класса A2, имеющая звездную величину $+5.12^m$. Расстояние между ними – примерно 3 угловые секунды. За 170 лет, начиная с открытия, звезды прошли меньше чем три процента своей орбиты. Разделенные расстоянием, по крайней мере, 185 а.е. они имеют период обращения более чем 1000 лет.

Чтобы найти Изар необходимо провести прямую (см. рис. 3) через две крайние звезды ручки ковша (Алькаид, Мицар) от ковша и на расстоянии (от Алькаиды) ≈ 4 расстояниям от Мицара до Алькаиды находится искомая звезда. ($S_{\max} = 3$ балла).

Задача № 3. «Пятно засветки Луны и Плеяды»

Условие. Используя угловой диаметр Луны ($32'$) и угловой радиус светящегося кольца (см. рис. 4, малое гало, угловой радиус которого $= 22^\circ$) определите во сколько раз пятно засветки (ослепительно белое пятно с четкими границами в центре фото), оставленное Луной на данном кадре, больше ее истинных размеров. Оцените также угловое расстояние от центра диска Луны до рассеянного скопления Плеяды (ответ представьте в градусах). (3 балла).



Рис. 4.

<u>Дано:</u>	<u>Решение:</u> Для определения параметра η необходимо предварительно определить угловой диаметр пятна засветки D''_{zas} . Для определения последнего, в свою очередь, необходимо знать масштаб фотографии μ . Его лучше всего оценить по данным условия задачи и измерениям его линейных размеров по фотографии.
$D''_{\zeta} = 32'$, $R''_{halo} = 22^\circ$,	
<u>Найти:</u>	На распечатке фотографии (страница формата А4) отмечаем центр видимого диска Луны. Затем от центра откладываем лучи, на которых выставляем засечки, отвечающие положению максимума яркости гало.
$\eta = \frac{D''_{zas}}{D''_{\zeta}}, d''_{Pl} - ?$	

Определяем величины полученных отрезков – радиусов кольца. Имеем $r_1 = 55$ мм, $r_2 = 54$ мм, $r_3 = 54$ мм. Находим средний линейный радиус $\bar{r} = \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3) = 54.3$ мм, тогда угловой масштаб фотографии составляет

$$\mu = \frac{R''_{halo}}{\bar{r}} = 0.405^\circ/\text{мм}. \quad (1)$$

Далее линейкой по фотографии определяем линейные размеры диска засветки Луны (ослепительно белого пятна с четкими границами в центре фото): $D_{\zeta 1} = 9.0$ мм, $D_{\zeta 2} = 9.5$ мм, $D_{\zeta 3} = 9.0$ мм (следует выполнить не менее $N = 3$ измерений диаметра, вдоль прямых, проходящих через центр диска и отстоящих друг от друга на угол $360^\circ/(2N)$). Определяем среднее значение

$$\bar{D}_{\zeta} = \frac{1}{3}(D_{\zeta 1} + D_{\zeta 2} + D_{\zeta 3}) = 9.17 \text{ мм}.$$

Затем определяем угловой диаметр засветки $D''_{zas} = \mu \cdot \bar{D}_{\zeta} = 3.71^\circ$, теперь можно определить $\eta = D''_{zas}/D''_{\zeta} = 6.96 \approx 7$ раз. Именно из-за особенности взаимодействия ПЗС-матрицы фотоаппарата (без светофильтра) с отраженным Луной светом, нам видится на фотографии Луна существенно больших размеров. И этот эффект важно учитывать в астрофотометрическом анализе.

Проводя аналогичные рассуждения можно показать, что линейное расстояние от Луны до центра скопления Плеяды (астеризм "маленький ковшик" в нижнем левом углу) составляет $\bar{\ell} = 80$ мм, а значит угловое расстояние $d''_{Pl} = \mu \cdot \bar{\ell} = 32.4^\circ \approx 32^\circ$.

Ответ: $\eta = D''_{zas}/D''_{\zeta} \approx 7$ раз, $d''_{Pl} = \mu \cdot \bar{\ell} \approx 32^\circ$. ($S_{\max} = 3$ балла).

Задача № 4. «Сближение астероида с Землей»

Условие. Астероид иногда приближается к Земле на минимальное расстояние, равное 2.0 а.е. Чему равен период его обращения вокруг Солнца? Орбиты Земли и астероида считать круговыми, орбита астероида лежит в плоскости эклиптики. (4 балла).

<u>Дано:</u>	<u>Решение:</u> Так как минимальное расстояние между Землей и астероидом достигается во время противостояния астероида, то радиус его орбиты оказывается равным
$\Delta_{\min} = 2.0$ а.е.	
<u>Найти:</u>	Здесь учтено, что радиус орбиты Земли $r_{\oplus} = 1$ а.е. Далее воспользуемся III законом Кеплера для астероида и Земли:
$T_a - ?$	

$$\frac{r_a^3}{r_{\oplus}^3} = \frac{T_a^2}{T_{\oplus}^2}, \Rightarrow T_a = T_{\oplus} \left(\frac{r_a}{r_{\oplus}} \right)^{3/2} = 1 \text{ год} \cdot 3^{3/2} = 5.2 \text{ лет}. \quad (2)$$

Ответ: $T_a = T_{\oplus} \left(\frac{r_a}{r_{\oplus}} \right)^{3/2} = 5.2$ лет. ($S_{\max} = 4$ балла).

Задача № 5. «Белый карлик – невидимка?»

Условие. Первый открытый белый карлик (достаточно яркий объект с звездной величиной $+8.4^m$) был обнаружен только в 1862 году (кстати, чуть более 150 лет назад). Однако затем он в течение нескольких десятков лет не наблюдался, и доказать, что это действительно белый карлик, удалось только в 1915 году. Почему так произошло? (4 балла).

Решение:

Существует несколько причин, из-за которых возможность наблюдать тот или иной астрономический объект периодически пропадает.

Причина № 1. Объект находится недалеко от эклиптики и каждый год на некоторое время оказывается недалеко от Солнца (при этом его наблюдения, естественно, практически невозможны, самая распространенная причина).

Причина № 2. Наблюдению слабых объектов может мешать также находящаяся недалеко на небе Луна.

Однако во всех подобных случаях период недоступности для наблюдений заведомо не превышает год, а в рассматриваемом случае наблюдения не проводились почти полвека.

Причина № 3. Еще один возможный вариант – вспыхивающий объект с большим интервалом времени между вспышками. Однако, если между вспышками объект не наблюдался, то это означает, что его блеск во время вспышки возрастал более чем на 10^m (проницающая способность телескопов в начале XX века доходила до 20^m), что возможно только для вспышек Новых (которые не повторяются раз в несколько десятков лет).

Причина № 4. Остается только один вариант – наш белый карлик должен быть компонентом двойной системы, второй компонент которой намного ярче. Тогда возможна ситуация, при которой белый карлик можно будет наблюдать только тогда, когда он окажется в апоастре своей орбиты (и отойдет на максимально возможное расстояние от напарника). Именно так и было, поскольку первый обнаруженный белый карлик – это Сириус В, рядом с которым находится намного более яркий Сириус А.

Ответ: Белый карлик должен быть компонентом двойной системы, второй компонент которой намного ярче. ($S_{\max} = 4$ балла).

Задача № 6. «Скорость движения Солнечной системы в Галактике»

Условие. Как известно, Солнечная система движется в Галактике по кривой близкой к окружности на расстоянии $r_{SS} = 7.62 \pm 0.32$ кпк. При этом один оборот вокруг центра Галактики система совершает за время $T = 225 \div 250$ млн. лет. Определите интервал возможных значений скорости движения Солнечной системы относительно центра Галактики. Ответ представьте в км/с. (5 баллов).

<u>Дано:</u>	<u>Решение:</u>
$r_{SS} = 7.62 \pm 0.32$ кпк, $T_{SS} = 225 \div 250$ млн. лет,	<p>Из условия задачи следует, что минимальный и максимальный допустимые значения радиуса орбиты Солнечной системы есть</p> $r_{SS}^{\min} = 7.30 \cdot 10^3 \text{ пк}, \quad r_{SS}^{\max} = 7.94 \cdot 10^3 \text{ пк}. \quad (3)$
<p style="text-align: center;"><u>Найти:</u></p> $\bar{V}_{SS}^{\min}, \bar{V}_{SS}^{\max} - ?$	<p>Минимальный и максимальный допустимые значения периода обращения Солнечной системы есть</p> $T_{SS}^{\min} = 2.25 \cdot 10^8 \text{ лет}, \quad T_{SS}^{\max} = 2.50 \cdot 10^8 \text{ лет}. \quad (4)$

Согласно условию задачи, "Солнечная система движется в Галактике по кривой близкой к окружности", тогда пройденный путь за один оборот есть длина окружности:

$$\ell = 2\pi r_{SS}.$$

Следовательно, средняя скорость есть

$$\bar{V}_{SS} = \frac{\ell}{T_{SS}} = \frac{2\pi r_{SS}}{T_{SS}}. \quad (5)$$

Из последнего выражения следует, что \bar{V}_{SS} определяется значениями r_{SS} и T_{SS} . Последняя дробь будет минимальной, если ее числитель принимает минимальное, а знаменатель – максимальные значения:

$$\bar{V}_{SS}^{\min} = \frac{2\pi r_{SS}^{\min}}{T_{SS}^{\max}} = \frac{1.415 \cdot 10^{18} \text{ км}}{7.890 \cdot 10^{15} \text{ сек}} = 179 \text{ км/сек}. \quad (6)$$

В расчетах мы учли, что 1 пк = $3.086 \cdot 10^{13}$ км, 1 год = 365.25 сут \times 24 (час/сут) \times 3600 (сек/час) = $3.156 \cdot 10^7$ сек.

$$\bar{V}_{SS}^{\max} = \frac{2\pi r_{SS}^{\max}}{T_{SS}^{\min}} = \frac{1.540 \cdot 10^{18} \text{ км}}{7.101 \cdot 10^{15} \text{ сек}} = 217 \text{ км/сек}. \quad (7)$$

Т.о. скорость Солнечной системы заключена в интервале (179, 217) км/с.

Ответ: скорость Солнечной системы заключена в интервале (179, 217) км/с. ($\$_{\max} = 5$ баллов).

Уровень «Знаток» (уровень В)

Задача № 7. «Созерцание звездного неба»

Условие. Любитель астрономии, живущий на экваторе, вышел в полночь на улицу полюбоваться звездным небом и занимался этим в течение 4-х часов. Оцените, сколько всего звезд он мог увидеть на небе, если у него не было телескопа. (6 баллов).

Решение:

На небесной сфере всего около 6 тысяч звезд, видимых невооруженным глазом. Следовательно, в каждый момент над горизонтом находится около 3 тысяч звезд. В течение суток небесная сфера вращается. Так как любитель астрономии живет на экваторе, для него ось вращения небесной сферы (ось мира) расположена горизонтально, поэтому в течение четырех часов из-за горизонта взойдет еще $4/24$ небесной сферы, на которых расположено примерно $(4/24) \times 6000 = 1000$ звезд.

Получаем, что всего любитель астрономии сможет увидеть примерно 4 тысячи звезд.

Ответ: любитель астрономии сможет увидеть (в идеальных условиях) около 4 тысяч звезд. ($\$_{\max} = 6$ баллов).

Задача № 8. «Где-то на планете Земля...»

Условие. Астроном-любитель сделал фотографию ночного неба (см. рис. 5). В каком месте на поверхности Земли была сделана эта фотография? Оцените время экспозиции фотосъемки (время, в течение которого затвор фотоаппарата был открыт и велась съемка), если расстояние



Рис. 5.

между колеями грунтовой дороги составляет 1.5 м и ее ближний край, представленный на фото, находится на расстоянии 8 метров от астронома. (7 баллов).

Дано:

$$\Delta r = 1.5 \text{ м,}$$

$$\ell = 8 \text{ м,}$$

Найти:

$$\tau_{exp} - ?$$

Решение:

На фотографии видно множество треков, которые оставляют звезды в своем суточном движении, при съемки с неподвижной фотокамеры. Как известно, все звезды вращаются относительно полюса мира. Очевидно, что данная точка находится в непосредственной близости к математическому горизонту. Следовательно, высота полюса мира $h_P \approx 0^\circ$.

Согласно теореме о связи географических и небесных координат, широта места наблюдения $\varphi = h_P \approx 0^\circ$. Следовательно, данный снимок был сделан вблизи земного экватора.

Для определения времени экспозиции τ_{exp} , необходимо учесть, что угловая мера $\Delta\varphi$ дуги – трека звезды пропорциональна времени экспозиции:

$$\Delta\varphi = \omega_{vis} \cdot \tau_{exp}. \quad (8)$$

где ω_{vis} – угловая скорость видимого движения звезды по небосводу. Последний параметр можно связать с угловой скоростью ω_\oplus вращения Земли и ее склонением δ (этот результат можно найти в курсах сферической астрономии разных авторов, а также в лекциях школы SamRAS-2012):

$$\omega_{vis} = \omega_\oplus \cos \delta, \quad \text{где } \omega_\oplus = \frac{2\pi}{T_\oplus} = 15.041''/c, \quad (9)$$

где $T_\oplus = 86164 \text{ с}$ – сидерический период вращения Земли. Из формул (8) и (9) следует, что время экспозиции есть

$$\tau_{exp} = \frac{\Delta\varphi}{\omega_\oplus \cos \delta}. \quad (10)$$

Далее следует выполнить следующую процедуру для $N \geq 3$ звезд. Для N околополюсных звезд (следует выбирать звезды как можно ближе к полюсу мира, в этом случае треки звезд все больше похожи на отрезки прямых, и в малой области фотографии угловой масштаб изображения меняется незначительно), треки которых отчетливо видны и представляют собой отрезки прямых, измеряем длины $\Delta\ell_i$ (выражены в мм) последних. Используя *угловой масштаб фотографии* μ (град/мм), который будет определен ниже, определяем дуги $\Delta\varphi_i$:

$$\Delta\varphi_i = \mu \cdot \Delta\ell_i. \quad (11)$$

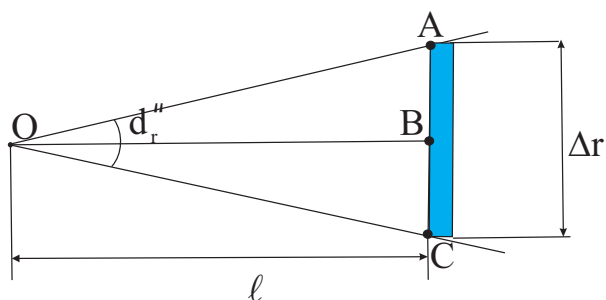
Через центры треков проводим перпендикуляры к трекам в направлении полюса мира. Если все сделано правильно, то перпендикуляры должны пересечься в одной точке – *полюсе мира*. От данной точки мы измеряем линейные расстояния ℓ_δ до треков (оснований перпендикуляров). И вычисляем полярные расстояния звезд p , а затем и склонения:

$$p_i = \mu \cdot \ell_{\delta i}, \Rightarrow \delta_i = 90^\circ - p_i. \quad (12)$$

В итоге с использованием формул (10)-(12) можно вычислить N значений экспозиции $\tau_{\text{exp } i}$ и затем определить среднее значение искомой величины:

$$\bar{\tau}_{\text{exp}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tau_{\text{exp } i}. \quad (13)$$

Для определения искомой величины необходимо предварительно определить угловой масштаб фотографии μ . Для этого воспользуемся данными о грунтовой дороге. Наблюдатель, видимо, находился прямо на дороге во время съемки, поэтому ближний край дороги находится на середине фотографии. Определим угол d_r'' под которым астроном видел колеи дороги (см. рис. 6).



Здесь $\Delta r = AC$ – расстояние между колеями дороги, в точке O находится наблюдатель; расстояние $\ell = OB$. Из прямоугольного $\triangle OAB$ следует, что

$$\operatorname{tg} \frac{d_r''}{2} = \frac{\Delta r/2}{\ell}, \Rightarrow d_r'' = 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{\Delta r/2}{\ell} \right],$$

$$d_r'' = 10.7^\circ. \quad (14)$$

Рис. 6. К определению угла d_r'' .

По картинке определяем линейное расстояние между колеями – $\ell_r = 25$ мм, тогда легко определить параметр μ :

$$\mu = \frac{d_r''}{\ell_r} = 0.43^\circ/\text{мм}. \quad (15)$$

Все численные результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1

	звезда №			
	1	2	3	4
$\Delta\ell$, мм	4.5	5.0	4.0	4.5
$\Delta\varphi$, град	1.93	2.14	1.71	1.93
ℓ_δ , мм	33	39.5	31.5	35
p , град	14.14	16.92	13.50	15.00
δ , град	75.86	73.08	76.50	75.00
τ_{exp} , мин	31.52	29.33	29.22	29.75
$\bar{\tau}_{\text{exp}} = 29.96$ мин ≈ 30 мин				

Ответ: данный снимок был сделан вблизи земного экватора; $\bar{t}_{\text{exp}} \approx 30$ мин. ($\$_{\text{max}} = 7$ баллов).

Задача № 9. «Луна вне зенита»

Условие. На каких широтах Земли Луна не может наблюдаться в зените? (8 баллов).

Решение:

Для того чтобы ответить на вопрос задачи, предварительно стоит определить географические широты, где Луна может наблюдаться в зените. Для этого воспользуемся стандартной формулой для высоты светила в верхней кульминации (ее легко получить, построив соответствующий рисунок):

$$h_{\text{в.к.}} = 90^\circ - \varphi + \delta_{\zeta}, \quad (16)$$

где φ – широта места наблюдения, δ_{ζ} – склонение Луны. Отсюда

$$\varphi = 90^\circ - h_{\text{в.к.}} + \delta_{\zeta} = \delta_{\zeta}, \quad \text{при } h_{\text{в.к.}} = 90^\circ. \quad (17)$$

Так как склонение всех точек эклиптики всегда удовлетворяет условию $\delta < 23^\circ 26'$, а наклон орбиты Луны к плоскости эклиптики составляет $5^\circ 9'$, то склонение Луны всегда не превышает по модулю $28^\circ 35'$. Тогда широта места наблюдения, где Луна, в принципе, может наблюдаться в зените есть

$$-28^\circ 35' \leq \varphi_{\text{zenit}} \leq +28^\circ 35'. \quad (18)$$

На остальных широтах выполнение указанного условия невозможно, т.е. ответ к данной задаче

$$-90^\circ 00' \leq \varphi_{\text{no zenit}} < -28^\circ 35' \cup +28^\circ 35' < \varphi_{\text{no zenit}} \leq +90^\circ 00'. \quad (19)$$

Ответ: $\varphi_{\text{no zenit}} \in [-90^\circ 00', -28^\circ 35'] \cup (+28^\circ 35', +90^\circ 00']$. ($\$_{\text{max}} = 8$ баллов).

Задача № 10. «Большая комета 1811 года»

Условие. В 1811 году была открыта знаменитая комета, получившая название «Большая комета 1811 года». Согласно современным представлениям ее период составляет $3.1 \cdot 10^3$ лет, а эксцентриситет $\varepsilon = 0.995$. Опираясь на указанные данные, оцените среднюю скорость кометы на ее орбите. Определите также отношение скоростей кометы в перигелии и афелии, если ее расстояние от Солнца в перигелии составляет 1.035 а.е. (8 баллов)

<u>Дано:</u>	<u>Решение:</u>
$T = 3.1 \cdot 10^3$ лет, $\varepsilon = 0.995$, $q = 1.035$ а.е.	Согласно условию задачи, эксцентриситет орбиты близок к единице, следовательно, орбита кометы есть очень сильно вытянутый эллипс, который без особой потери точности можно считать отрезком прямой.
<u>Найти:</u>	
\bar{V} , V_q/V_Q – ?	Тогда полная длина L такой орбиты связана с большой полуосью a простым соотношением $L = 4a$. Большую полуось a можно найти из III закона Кеплера:
	$\frac{a^3}{a_{\oplus}^3} = \frac{T^2}{T_{\oplus}^2}, \Rightarrow a = a_{\oplus} \left(\frac{T}{T_{\oplus}} \right)^{2/3} = 1 \text{ а.е.} \cdot (3.1 \cdot 10^3)^{2/3} = 212.6 \text{ а.е.} \quad (20)$

здесь $a_{\oplus} = 1$ а.е. – большая полуось земной орбиты, $T_{\oplus} = 1$ год – сидерический период обращения Земли вокруг Солнца. Следовательно, средняя орбитальная скорость кометы есть

$$\bar{V} = \frac{L}{T} = \frac{4a}{T} = \frac{4 \cdot 212.6 \text{ а.е.} \cdot 1.496 \cdot 10^8 \text{ км/а.е.}}{3.1 \cdot 10^3 \text{ лет} \cdot 3.147 \cdot 10^7 \text{ с/год}} = 1.3 \text{ км/с.} \quad (21)$$

Из закона сохранения момента импульса (момента количества движения) кометы следует равенство:

$$q \cdot V_q = Q \cdot V_Q, \quad \frac{V_q}{V_Q} = \frac{Q}{q}. \quad (22)$$

здесь q – расстояние от Солнца до перигелия кометы, V_q – скорость кометы в данной точке, Q – расстояние от Солнца до афелия кометы, V_Q – скорость кометы в афелии. Используя свойства эллипса можно показать, что параметры q , Q можно представить в виде:

$$q = a(1 - \varepsilon), \quad Q = a(1 + \varepsilon), \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{q} = \frac{(1 + \varepsilon)}{(1 - \varepsilon)} = 399 \approx 400. \quad (23)$$

Ответ: $\bar{V} = 1.3$ км/с, $\frac{V_q}{V_Q} = \frac{(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} = 399 \approx 400$. ($S_{\max} = 8$ баллов).

Задача № 11. «Потемнение диска Солнца к краю»

Условие. Почему при визуальных наблюдениях Солнца отчетливо просматривается потемнение его видимого диска к краю? (9 баллов).

Решение:

Прежде всего, **потемнение к краю** – это зависимость интенсивности излучения, выходящего из атмосферы звезды, от направления. При тепловом (термодинамическом) равновесии, например в теплоизолированной замкнутой полости, интенсивность излучения описывается формулой Планка и не зависит от направления.

Реальные звездные атмосферы далеки от термодинамического равновесия, в частности потому, что атмосферы излучают и теряют с излучением энергию. Спектр этого излучения отклоняется от закона Планка, и интенсивность излучения зависит от направления (это по сути *первая причина указанного феномена*).

Если физические условия в атмосфере звезды меняются с высотой не слишком сильно, то состояние такой атмосферы можно приближенно характеризовать т. н. *локальным термодинамическим равновесием*, при котором состояние каждого малого объема атмосферы звезды можно охарактеризовать своей температурой. При отсутствии нетепловых источников нагрева вещества (таких, как диссипация энергии акустических волн), температура в атмосфере звезды убывает с высотой, и для далекого наблюдателя интенсивность выходящего наружу излучения максимальна в центре диска звезды и минимальна на краю диска.

Физически это означает, что в *направлении нормали к поверхности звезды наружу выходит излучение слоев, расположенных на максимально возможной геометрической глубине, где локальная температура наибольшая*. Для излучения, испускаемого под углом к нормали, путь преодоляемый световым лучом, проходит сквозь толщу атмосферы больший геометрический путь (см. рис. 7) и, потому больше поглощается выше лежащими слоями атмосферы звезды (*вторая основная причина данного феномена*). Следовательно, в этом случае мы сможем видеть солнечный свет, испущенный более холодными и высоколежащими слоями атмосферы Солнца. Но чем холоднее тело, тем оно меньше испускает света. Поэтому интенсивность выходящего излучения убывает с увеличением угла между лучом зрения и нормалью к поверхности звезды. Угол максимален на краю звездного диска, где и наблюдается наибольшее потемнение.

Данное явление хорошо заметно на солнечном диске, поверхностная яркость которого на краю составляет в видимом свете лишь $\approx 40\%$ от яркости в центре диска (см. рис. 8). Степень потемнения к краю зависит от градиента температуры, характера рассеяния излучения и непрозрачности вещества звездной атмосферы.

Следует отметить, что потемнение диска к краю может изучаться не только у Солнца, но и у звезд, входящих в затменные двойные системы. Влияние данного феномена на кривые блеска затменных переменных весьма слабо, поэтому эффект потемнения удастся надежно определить

лишь у разделенных затменных переменных (когда звезды мало искажают форму друг друга и их можно считать шарообразными).

Для данной длины волны указанное явление усиливается при переходе от звезд раннего к звездам позднего спектрального класса (с ростом градиента температуры), а для данного спектрального класса данный феномен усиливается при переходе от длинноволнового конца спектра к коротковолновому.

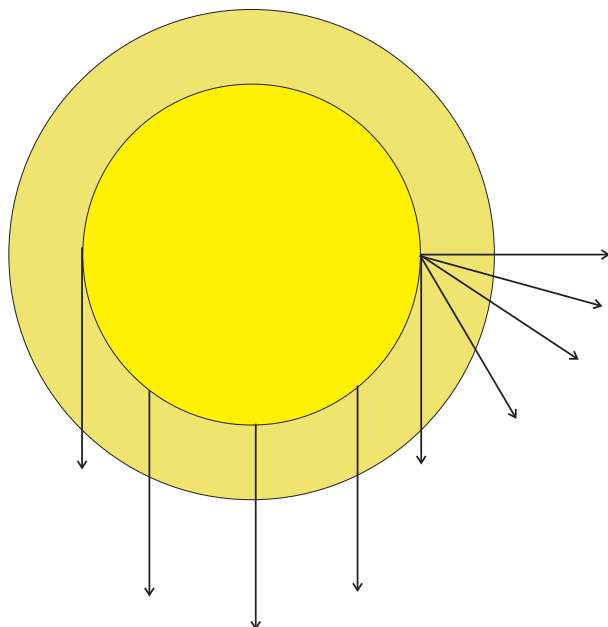


Рис. 7. Схема поясняющая суть феномена.

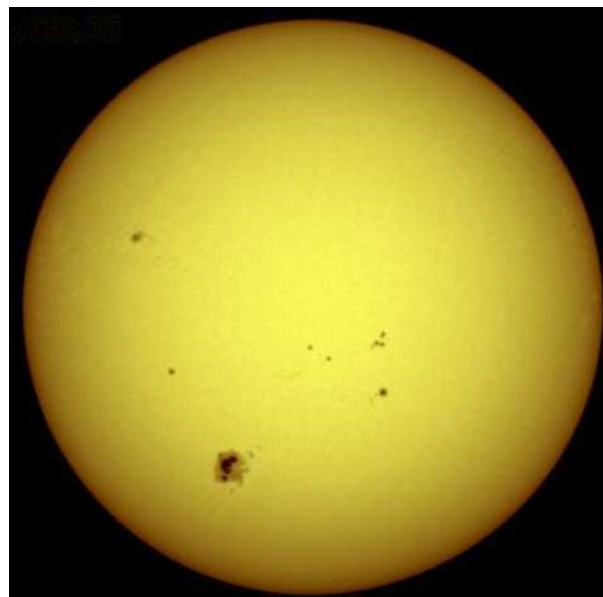


Рис. 8. К определению потемнения диска Солнца к краю.

Определив из наблюдений закон потемнения, можно пытаться решать обратную задачу – найти распределение температуры и плотности в атмосфере звезды. Такая задача решается для Солнца, где интенсивность света измеряют с хорошей точностью.

Ответ: Отсутствие теплового равновесия в атмосфере Солнца, как следствие, зависимость температуры солнечной плазмы в атмосфере звезды от высоты и различие в поглощении света атмосферой Солнца (испущенного под разными углами к нормали поверхности) – основные причины указанного феномена. ($S_{\max} = 9$ баллов).

Задача № 12. «Открытие колец у Реи – спутника Сатурна»

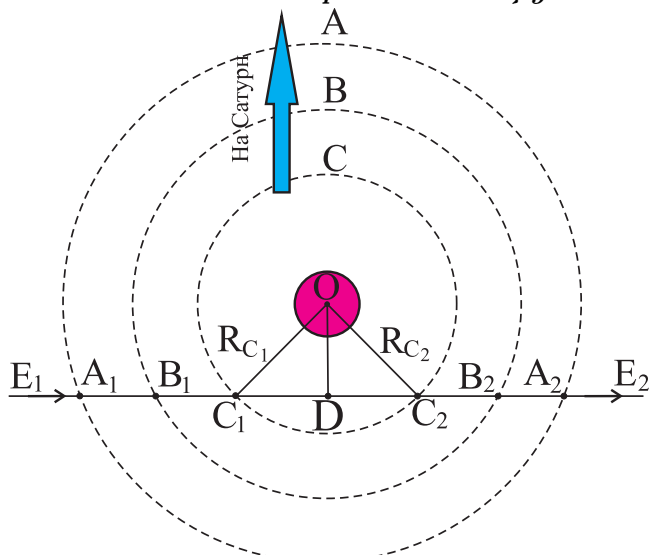


Рис. 9. К определению радиусов колец.

Условие. В 2008 году специалисты NASA объявили о "непрямом открытии" пылевых колец у Реи – второго по размерам и массе спутника Сатурна, с помощью КА "Кассини". Открытие было сделано с использованием "эффекта тени", наблюдавшейся в потоке электронов, движущихся от Сатурна и регистрируемых КА.

Кольцо С	
t_1	t_2
$t_{C_2} = 22^h 40^m 00^s$	$t_{C_1} = 22^h 35^m 18^s$
Кольцо В	
$t_{B_2} = 22^h 40^m 45^s$	$t_{B_1} = 22^h 34^m 44^s$
Кольцо А	
$t_{A_2} = 22^h 41^m 27^s$	$t_{A_1} = 22^h 34^m 06^s$

Когда КА проходил мимо Реи по прямолинейной траектории, по другую сторону от Сатурна, в точках $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ его траектории (см. рис. 8) отчетливо наблюдалась тень от колец. Используя известные данные наблюдений $OD = 1251$ км, $t_D = 22^{\text{ч}}37^{\text{м}}39^{\text{с}}$ – момент прохождения КА через точку D – центр тени Реи, значения моментов времени пребывания КА в указанных точках t_1, t_2 и относительной скорости движения аппарата $v = 7.272$ км/с, определите значения радиусов колец Реи. Определите также периоды их обращения и орбитальные скорости движения тел колец (значение массы Реи возьмите из справочных данных). Ответ представьте средними значениями искомых величин. (10 баллов).

Решение:

Согласно условию задачи траектория движения – прямая, а скорость движения – постоянная величина v , следовательно, используя указанные моменты времени, можно найти следующие отрезки:

$$\begin{aligned} r_{A_1} &= A_1D = v(t_D - t_{A_1}), & r_{A_2} &= DA_2 = v(t_{A_2} - t_D); \\ r_{B_1} &= B_1D = v(t_D - t_{B_1}), & r_{B_2} &= DB_2 = v(t_{B_2} - t_D); \\ r_{C_1} &= C_1D = v(t_D - t_{C_1}), & r_{C_2} &= DC_2 = v(t_{C_2} - t_D). \end{aligned}$$

Зная минимальное расстояние, на которое сблизился аппарат $r = OD$, можно по теореме Пифагора найти радиусы колец:

$$\begin{aligned} R_{A_1} &= \sqrt{r^2 + r_{A_1}^2}, & R_{A_2} &= \sqrt{r^2 + r_{A_2}^2}, \\ R_{B_1} &= \sqrt{r^2 + r_{B_1}^2}, & R_{B_2} &= \sqrt{r^2 + r_{B_2}^2}, \\ R_{C_1} &= \sqrt{r^2 + r_{C_1}^2}, & R_{C_2} &= \sqrt{r^2 + r_{C_2}^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Кольца, в общем случае, могут иметь форму эллипса и характеризоваться относительно небольшими коэффициентами сжатия. Далее будем пренебрегать эллиптичностью колец, полагая, что кольца имеют форму окружностей, тогда средние радиусы колец есть:

$$R_A = \frac{R_{A_1} + R_{A_2}}{2}, \quad R_B = \frac{R_{B_1} + R_{B_2}}{2}, \quad R_C = \frac{R_{C_1} + R_{C_2}}{2}. \quad (25)$$

Используя известные данные наблюдений $r = 1251$ км, $t_D = 22^{\text{ч}}37^{\text{м}}39^{\text{с}}$, t_1, t_2 и значение относительной скорости движения аппарата $v = 7.272$ км/с, мы выполнили расчет, согласно предложенному алгоритму, и получили следующие результаты, представленные в таблице 2.

Таблица 2

Кольцо С						
t_1	t_2	r_1 , км	r_2 , км	R_1 , км	R_2 , км	R , км
$22^{\text{ч}}40^{\text{м}}00^{\text{с}}$	$22^{\text{ч}}35^{\text{м}}18^{\text{с}}$	1025.4	1025.4	1615	1615	1615
Кольцо В						
$22^{\text{ч}}40^{\text{м}}45^{\text{с}}$	$22^{\text{ч}}34^{\text{м}}44^{\text{с}}$	1352.7	1272.7	1841	1784	1813
Кольцо А						
$22^{\text{ч}}41^{\text{м}}27^{\text{с}}$	$22^{\text{ч}}34^{\text{м}}06^{\text{с}}$	1658.1	1549.0	2077	1991	2034

Для определения кинематических параметров частиц колец Реи запишем второй закон Ньютона для одной из таких частиц, движущихся в поле тяготения Реи:

$$\mathfrak{M} \frac{v^2}{R} = \frac{G \cdot \mathfrak{M}_{\text{Rhea}} \cdot \mathfrak{M}}{R^2}. \quad (26)$$

Откуда следует, линейная орбитальная скорость спутника:

$$V = \sqrt{\frac{G \cdot \mathfrak{M}_{\text{Rhea}}}{R}}. \quad (27)$$

Поскольку частица движется равномерно по окружности, то

$$v = \frac{2\pi R}{T},$$

где T — период обращения частицы вокруг Реи. Следовательно, соотношения (26) можно представить в виде:

$$\frac{4\pi^2 R^2}{T^2} = \frac{G \cdot \mathfrak{M}_{\text{Rhea}}}{R}, \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{G \cdot \mathfrak{M}_{\text{Rhea}}}} = \frac{2\pi R^{3/2}}{\sqrt{G \cdot \mathfrak{M}_{\text{Rhea}}}}. \quad (28)$$

Выполняя расчет искомых кинематических величин по формулам (26), (28) для малых тел колец Реи с использованием массы Реи $\mathfrak{M}_{\text{Rhea}} = 2.306 \cdot 10^{21}$ кг и значений средних радиусов колец, представленных в таблице 2, в итоге получаем следующие результаты, представленные в таблице 3.

Таблица 3

Кольцо	T, сут	V, км/с
C	0.381	0.309
B	0.453	0.291
A	0.538	0.275

Ответ: $R_A = 2034$ км, $R_B = 1813$ км, $R_C = 1615$ км; $T_A = 0.381$ сут, $T_B = 0.453$ сут, $T_C = 0.538$ сут; $V_A = 0.309$ км/с, $V_B = 0.291$ км/с, $V_C = 0.275$ км/с. ($S_{\text{max}} = 10$ баллов).

Уровень «Профи» (уровень C)

Задача № 13. «Активное Солнце 1997 года»

Условие. Пятого октября 1997 года астрофизиками с помощью телескопа с большим диаметром объектива была получена фотография видимого диска Солнца (см. рис. 10). Опираясь на представленный образ и определение числа Вольфа, докажите, что Солнце в данный момент является активным (11 баллов).

Решение:

Согласно определению, числом Вольфа называется величина, определяемая выражением вида:

$$W = k \cdot (10 \cdot g + f), \quad (29)$$

где $k \geq 1$ — коэффициент пропорциональности, зависящий от типа используемого прибора для наблюдений (главным образом, от его разрешающей способности). Чем больше диаметр объектива телескопа, тем больше разрешающая способность последнего, тем ближе коэффициент k к единице. Поскольку получена большая фотография Солнца с высокой разрешающей способностью, то будем далее полагать, что $k \approx 1$. В формуле (29) g — количество групп пятен, f — общее количество пятен, видимых на диске Солнца.

Принято считать Солнце активным, если число Вольфа удовлетворяет условию:

$$W \geq 100. \quad (30)$$

Из рис. 10 видно, что на диске Солнца отчетливо не менее $g = 8$ групп пятен, причем общее количество пятен f существенно больше 20, что автоматически указывает на выполнение условия (30). Т.о. Солнце является активным.

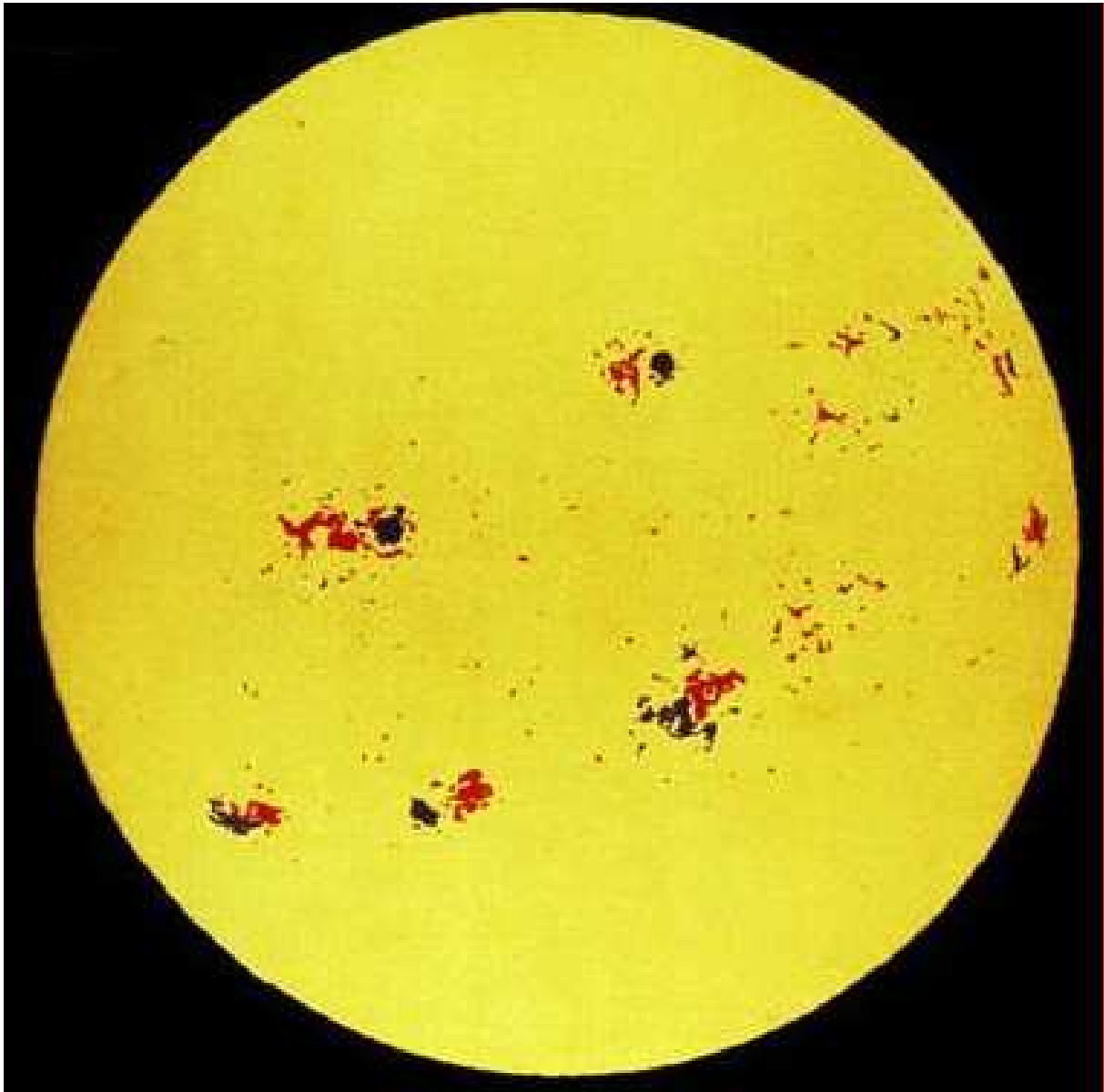


Рис. 10. Фотография видимого диска Солнца.

Ответ: $g \geq 8$, $f \geq 20$, $W > 100$ – Солнце является активным. ($S_{\max} = 11$ баллов).

Задача № 14. «Антенна обсерватории "Спектр-Р"»

Условие. Обсерватория «Спектр-Р» находится на орбите с большой полуосью 200 тыс. км и расстоянием в апогее 350 тыс. км. Направление параболической антенны, обеспечивающей связь аппарата с наземным центром управления при прохождении перигея орбиты, необходимо корректировать раз в 3 минуты. Передача данных антенной ведется на частоте 15 ГГц. Оцените диаметр этой антенны. (12 баллов).

<p><u>Дано:</u></p> <p>$a = 2 \cdot 10^5$ км, $Q = 3.5 \cdot 10^5$ км, $\Delta t = 3$ мин, $\nu = 1.5 \cdot 10^{10}$ Гц.</p>	<p><u>Решение:</u></p> <p>Прежде всего отметим, что у орбиты аппарата есть апогей и перигей, следовательно, обсерватория движется вокруг Земли. Вычислим расстояние до обсерватории в перигее орбиты q, зная расстояние в апогее Q и большую полуось a.</p>
<p><u>Найти:</u></p> <p>$D_a - ?$</p>	<p>Очевидно, что</p> $2a = q + Q, \Rightarrow q = 2a - Q = 5 \cdot 10^4 \text{ км,}$

Далее определим скорость обсерватории в перигее: воспользуемся законом сохранения энергии и момента импульса (момента количества движения – МКД) для космического аппарата, находящегося в перигее и апогее:

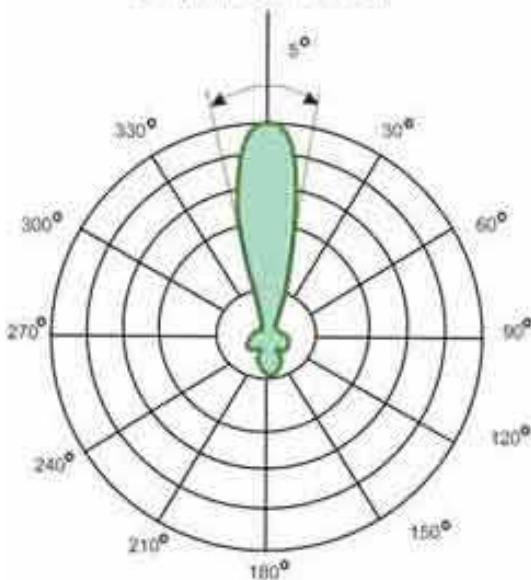
закон сохранения МКД: $m q V_q = m Q V_Q, \Rightarrow V_Q = V_q \left(\frac{q}{Q} \right),$ (31)

закон сохранения энергии: $\frac{m V_q^2}{2} - \frac{G m \mathcal{M}_\oplus}{q} = \frac{m V_Q^2}{2} - \frac{G m \mathcal{M}_\oplus}{Q},$ (32)

откуда следует выражение для V_q :

$$\begin{aligned} V_q^2 \left(1 - \left(\frac{q}{Q} \right)^2 \right) &= \frac{G \mathcal{M}_\oplus}{q Q} (Q - q), \Rightarrow V_q = \sqrt{2G \mathcal{M}_\oplus \left(\frac{Q}{q} \right) \frac{1}{q + Q}} = \\ &= \sqrt{\frac{G \mathcal{M}_\oplus}{R_\oplus^2} \left(\frac{Q}{2a - Q} \right) \frac{R_\oplus^2}{a}} = \sqrt{g_0 R_\oplus \left(\frac{Q}{2a - Q} \right) \frac{R_\oplus}{a}} = V_I \sqrt{\left(\frac{Q}{2a - Q} \right) \frac{R_\oplus}{a}} = \\ &= 3.74 \text{ км/с.} \end{aligned}$$
 (33)

здесь учтено, что $V_I = \sqrt{g_0 R_\oplus} = 7.91$ км/с – первая космическая скорость у поверхности Земли, $g_0 = G \mathcal{M}_\oplus / R_\oplus^2 = 9.81$ м/с² – ускорение свободного падения у поверхности Земли, $R_\oplus = 6378$ км – средний экваториальный радиус Земли.



Вычислим угловую скорость движения обсерватории при наблюдении с Земли. Поскольку $q/R_\oplus \approx 7.8$, то расстоянием между центром Земли и наземным центром управления можно пренебречь. Тогда

$$\omega_q = \frac{V_q}{q} = 7.48 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с.} \quad (34)$$

Далее заметим, что любая параболическая радиоантенна излучает преимущественно вперед, в область пространства, имеющую форму лепестка фикуса (см. рис. 11). Причем угол между касательными к данному "лепестку" определяет **угловое разрешение антенны** β . Если Земля выпадает из данного лепестка, то сигнал от антенны не достигнет антенны наземной станции и связь будет прервана.

Из условия следует, что за время Δt Земля, с точки зрения обсерватории, успевает переместиться на угловое расстояние β (после чего излучение антенны перестает "попадать" на Землю и антенну необходимо поворачивать). Следовательно, угловое разрешение антенны составляет

$$\beta = \omega_q \cdot \Delta t = 0.0135 \text{ рад} \approx 46.3'. \quad (35)$$

С другой стороны, угловое разрешение антенны представляется в виде:

$$\beta \approx \frac{\lambda}{D_a} = \frac{c}{\nu D_a} \quad (36)$$

Из выражений (35) и (36) следует, что

$$D_a = \frac{c}{\nu \omega_q \cdot \Delta t} = 1.48 \text{ м} \approx 1.5 \text{ м}. \quad (37)$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света. Реальный диаметр антенны реальной обсерватории чуть больше 1.5 метра, и этот ответ можно получить при более точных вычислениях (необходимо учитывать коэффициент пропорциональности в (36) между β и $\frac{\lambda}{D_a}$, близкий к единице).

Ответ: $D_a = 1.5$ м ($\$_{\max} = 12$ баллов).

Задача № 15. «Восходящие и заходящие звезды»

Условие. Какую долю от общего числа звезд на широте города Самары (широта равна $53^\circ 12'$) составляют восходящие и заходящие звезды? Следует полагать, что звезды равномерно распределены по небесной сфере. (12 баллов).

Дано:

$$\varphi = 53^\circ 12',$$

Найти:

$$\eta - ?$$

Решение:

Как известно, все светила на небесной сфере можно условно разделить на три категории: 1) незаходящие, 2) восходящие и заходящие и 3) невосходящие.

Для ответа на вопрос задачи следует сначала определить долю незаходящих звезд η_1 в г. Самара. Из рис. 1 видно, что для таких светил полярное расстояние $p_{\max} = \varphi \Rightarrow \delta \geq 90^\circ - \varphi$.

Количество незаходящих звезд в данной месте наблюдения пропорционально площади шарового сектора S_{sec} с углом раствора φ , т.е.

$$N_{\text{vis}} \sim S_{\text{sec}}$$

. Полное количество звезд на всей небесной сфере пропорционально площади всей ее поверхности

$$N_{\text{all}} \sim S_{\text{all}}, \quad S_{\text{all}} = 4\pi R^2$$

. Из справочника по математике (например, справочник Выгодского) воспользуемся формулой площади шарового сектора:

$$S_{\text{sec}} = 2\pi R^2(1 - \cos \varphi), \quad (38)$$

тогда

$$\eta_1 = \frac{N_{\text{vis}}}{N_{\text{all}}} = \frac{S_{\text{sec}}}{S_{\text{all}}} = \frac{1}{2}(1 - \cos \varphi) = 0.2. \quad (39)$$

Нетрудно видеть, что такую же долю η_1 составляют в г. Самара невосходящие звезды. Следовательно, доля, которую составляют восходящие и заходящие звезды в г. Самара есть

$$\eta = 1 - 2\eta_1 = 0.6. \quad (40)$$

Ответ: $\eta = 0.6$ ($\$_{\max} = 12$ баллов).

Задача № 16. «Суть физической природы малого гало»

Условие. Какова физическая причина появления атмосферного явления – светящегося кольца (см. рис. 2) вокруг Луны – *малого гало*? Какие условия необходимы для его образования? Докажите, что его радиус должен быть равен 22° . (13 баллов).

Решение:

В наиболее общем смысле, *гало* – это атмосферное явление, представляемое взору человека как светлые круги, дуги, столбы, пятна, наблюдаемые вокруг или вблизи дисков Солнца или Луны. Наиболее часто встречаются кольца вокруг этих светил с угловым радиусом примерно 22° – это, так называемое, *малое гало*. Как правило, малое гало выглядит замкнутым кольцом, кроме тех случаев, когда перисто-слоистые облака неравномерно распределены по небу; оно обычно ярче всего сверху или снизу, справа или слева, реже в промежуточных направлениях.

Необходимым условием возникновения феномена гало являются определенные погодные условия. Как правило, данный феномен наблюдается при смене тихой и ясной погоды на ветреную, что сопровождается падением давления воздуха, небосвод покрывается тонкой белой дымкой. Свет от Солнца, проходя через эту дымку, рассеивается подобно свету настольной лампы на матовом стекле. При этом очертания Солнца становятся расплывчатыми. Такая погода случается довольно часто. Но кажется весьма странным, что так много людей никогда не замечали гало вокруг Солнца.

Достаточным условием возникновения феномена гало является наличие малых ледяных кристаллов правильной формы в перисто-слоистых или других облаках, порождающих дымку на небосводе. В морозный день ледяные кристаллы могут находиться и в воздухе, окружающем наблюдателя.

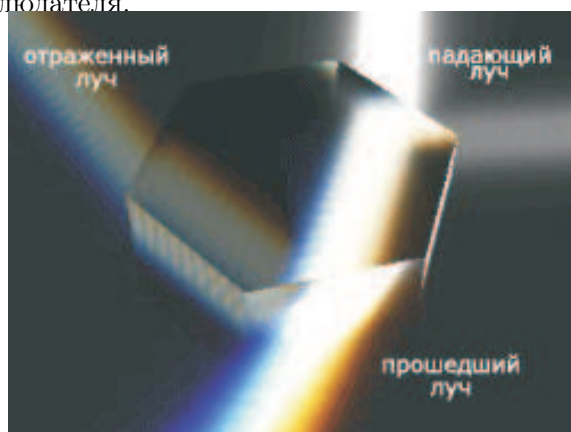


Рис. 13. Преломление света на шестигранных кристаллах водяного льда.

Причина возникновения малого гало – двукратное преломление световых лучей в ледяных кристаллах-призмах гексагональной формы (см. рис. 13). Поскольку показатель преломления электромагнитной волны, падающей на ледяной кристалл зависит от ее длины, то световые волны разных длин будут преломляться на кристалле по-разному. Это приводит к появлению слегка окрашенных в радужные цвета элементов гало (дисперсия света). Внутренний край малого гало достаточно резко ограничен (см. рис. 4), он окрашен в красный цвет. За ним следует желтый, неяркий, переходящий в белый.

Докажем, что радиус кольца должен быть равен 22° . Для этого рассмотрим задачу о прохождении светового луча (волны с определенной длиной) через трехгранную призму с преломляющим углом Θ и показателем преломления n . Дело в том, что гексагональные кристаллы в сечении (перпендикулярном их главной оси симметрии) есть ни что иное как усеченная призма с углом при вершине $\Theta = 60^\circ$ (в последнем факте можно легко убедиться).

Пусть луч падает на левую грань призмы под углом α_1 (см. рис. 14). Преломившись на границе "вакуум-среда", луч будет распространяться под углом β_1 к нормали по прямой AB . На вторую грань данный луч упадет под углом β_2 и, преломившись, выйдет под углом α_2 к нормали. Используя закон преломления в точках A и B , можно записать:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = n, \quad \frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_2} = n. \quad (41)$$

В результате прохождения через призму световой луч отклоняется от первоначального направления на угол $\angle C_1CB = \delta$, называемый *углом отклонения* луча. Из рис. 14, очевидно, что $\delta = \angle CAB + \angle CBA$. Поскольку $\angle CAB = \alpha_1 - \beta_1$, $\angle CBA = \alpha_2 - \beta_2$, то

$$\delta = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2). \quad (42)$$

Из треугольника $\triangle ABD$ следует, что

$$\beta_1 + \beta_2 + \angle ADB = \pi, \Rightarrow \angle ADB = \pi - (\beta_1 + \beta_2),$$

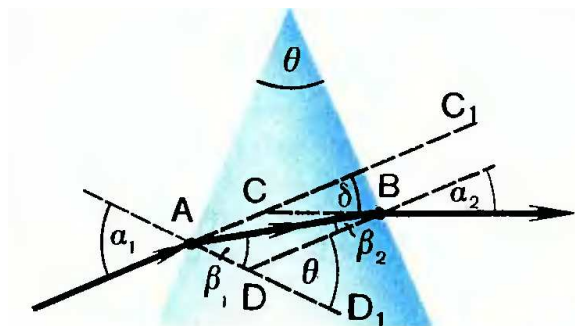


Рис. 14. К определению угла отклонения.

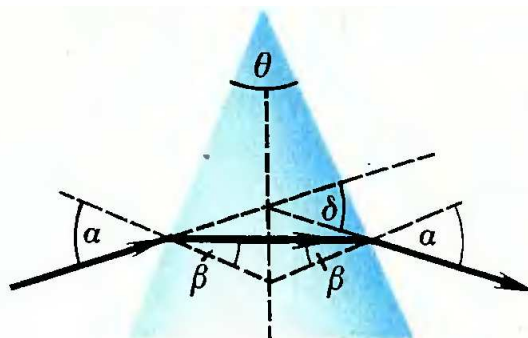


Рис. 15. Симметричное распространение светового луча.

Для четырехугольника $ADB\Theta$ справедливо следующее равенство:

$$\frac{\pi}{2} + \Theta + \frac{\pi}{2} + \angle ADB = 2\pi, \quad \Theta = \pi - \angle ADB = \beta_1 + \beta_2. \quad (43)$$

С учетом последнего результата, выражение (42) можно представить в виде:

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \Theta. \quad (44)$$

Рассмотрим случай с симметричным ходом луча в призме — когда траектория луча симметрична относительно биссектрисы преломляющего угла (рис. 15). В данном случае

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta = \frac{\Theta}{2}, \\ \delta = 2\alpha - \Theta. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Здесь и далее $n = 1.313$ — показатель преломления водяного льда в атмосфере Земли для желто-зеленых лучей, $\Theta = 60^\circ$, $\alpha_1 = n \cdot \sin[\Theta/2] = 41.0^\circ$ — угол падения светового луча в случае симметричного хода световых лучей.

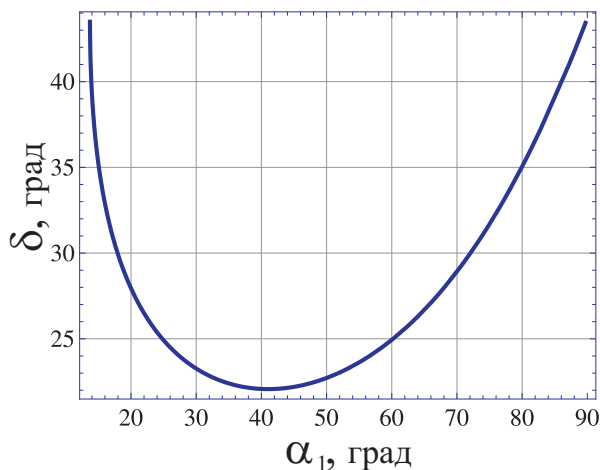


Рис. 16. Зависимость угла отклонения от угла падения светового луча на призму.

С учетом представленных равенств закон (41) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \sin\left[\frac{\delta + \Theta}{2}\right] &= n \cdot \sin\left[\frac{\Theta}{2}\right], \Rightarrow \\ \delta &= 2 \arcsin\left(n \cdot \sin\left[\frac{\Theta}{2}\right]\right) - \Theta. \end{aligned} \quad (46)$$

Можно строго доказать, что при симметричном ходе светового луча угол отклонения δ минимален. Для этого с использованием (41), (43) запишем δ как функцию β_1 :

$$\delta = \alpha_1(\beta_1) + \alpha_2(\beta_1) - \Theta, \quad (47)$$

$$\text{где } \alpha_1(\beta_1) = \arcsin(n \cdot \sin \beta_1),$$

$$\alpha_2(\beta_1) = \arcsin(n \cdot \sin(\Theta - \beta_1)).$$

Доказательство данного факта можно провести двумя альтернативными способами:

1) Графический способ. Рассмотрим поведение функции $\delta(\alpha_1)$, графически (см. рис. 16). Из рисунка видно, что кривая имеет один минимум, отвечающий значению $\alpha_1 = 41.0^\circ$, при этом $\delta = 22^\circ$. Важно отметить, что в окрестности минимума угол δ меняется крайне незначительно на интервале значений $\alpha_1 \in (36^\circ, 46^\circ)$. Это означает, что все лучи падающие в этом интервале

углов будут распространяться после прохождения кристалла фактически в одном направлении, под углом отклонения $\delta \approx 22^\circ$. На других участках функция $\delta(\alpha_1)$ быстро меняется.

2) Аналитический способ – задача поиска экстремума функции. Решим задачу на экстремум в отношении полученной функции. Для этого вычислим первую производную от δ по переменной β_1 и приравняем ее к нулю:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{d\beta_1} &= \frac{d\alpha_1}{d\beta_1} + \frac{d\alpha_2}{d\beta_1} = 0, \\ \frac{d\alpha_1}{d\beta_1} &= \frac{n \cdot \cos \beta_1}{\sqrt{1 - (n \cdot \sin \beta_1)^2}}, \quad \frac{d\alpha_2}{d\beta_1} = -\frac{n \cdot \cos(\Theta - \beta_1)}{\sqrt{1 - (n \cdot \sin(\Theta - \beta_1))^2}}, \Rightarrow \\ n \cdot \cos \beta_1 \sqrt{1 - (n \cdot \sin(\Theta - \beta_1))^2} &= n \cdot \cos(\Theta - \beta_1) \sqrt{1 - (n \cdot \sin \beta_1)^2}, \end{aligned}$$

или

$$\sqrt{(1 - \sin^2 \beta_1)(1 - n^2 \sin^2(\Theta - \beta_1))} = \sqrt{(1 - \sin^2(\Theta - \beta_1))(1 - n^2 \sin^2 \beta_1)}$$

из сопоставления левых и правых частей уравнения приходим к заключению, что $\Theta - \beta_1 = \beta_1$, тогда $\beta_1^0 = \Theta/2$ – есть точка экстремума (что отвечает ситуации симметричного хода светового луча, см. рис. 15). Для того, чтобы строго доказать, что точка экстремума есть точка минимума необходимо вычислить вторую производную $\delta(\beta_1)''$ и исследовать знак последней при $\beta_1^0 = \Theta/2$. Точке минимума отвечает ситуация $\delta(\beta_1^0)'' > 0$.

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2\delta}{d\beta_1^2} \right|_{\beta_1=\beta_1^0} &= \left. \frac{d^2\alpha_1}{d\beta_1^2} \right|_{\beta_1=\beta_1^0} + \left. \frac{d^2\alpha_2}{d\beta_1^2} \right|_{\beta_1=\beta_1^0}, \\ \frac{d^2\alpha_1}{d\beta_1^2} &= -\frac{n \cdot \sin \beta_1}{\sqrt{1 - n^2 \cdot \sin^2 \beta_1}} + \frac{n^3 \cdot \cos^2 \beta_1 \sin \beta_1}{(1 - n^2 \cdot \sin^2 \beta_1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{n \cdot \sin \beta_1}{(1 - n^2 \cdot \sin^2 \beta_1)^{\frac{3}{2}}} \times \\ &\times [n^2 \cos^2 \beta_1 + n^2 \cdot \sin^2 \beta_1 - 1] = \frac{n(n^2 - 1) \cdot \sin \beta_1}{(1 - n^2 \cdot \sin^2 \beta_1)^{\frac{3}{2}}}, \\ \frac{d^2\alpha_2}{d\beta_1^2} &= \frac{n(n^2 - 1) \cdot \sin(\Theta - \beta_1)}{(1 - n^2 \cdot \sin^2(\Theta - \beta_1))^{\frac{3}{2}}}, \Rightarrow \left. \frac{d^2\delta}{d\beta_1^2} \right|_{\beta_1=\beta_1^0} = \frac{n(n^2 - 1) \cdot \sin \Theta/2}{(1 - n^2 \cdot \sin^2 \Theta/2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \quad (48)$$

поскольку $n > 1$ для любой вещества, $\Theta < 180^\circ$, то числитель последнего выражения, очевидно, всегда больше нуля. Знаменатель также больше нуля при условии, что $1 - n^2 \cdot \sin^2 \Theta/2 > 0$, тогда $\Theta < 2 \arcsin(1/n)$. Так, для водяного льда $n = 1.313$ и, следовательно, $\Theta < 99.2^\circ$. Т.о. $\delta(\beta_1^0)'' > 0$, что и требовалось доказать.

Итак, минимальный угол отклонения достигается при симметричном ходе светового луча. Легко вычислить минимальный угол отклонения δ_{\min} согласно (46). Для трехгранной призмы с преломляющим углом $\Theta = 60^\circ$ он равен $\delta_{\min} = 22^\circ$ при $n = 1.313$ (водяной лед) для желто-зеленого света.

Можно легко убедиться, что пучок световых лучей, падающих на кристалл под углами, близкими к $\alpha = \arcsin(n \cdot \sin \Theta/2) = 41^\circ$ (см. рис. 16), проходит через кристалл почти не рассеиваясь (меньше других "разбросаны по углам") и выходят почти все под углом δ_{\min} к первоначальному направлению. Наибольшая концентрация лучей эквивалентна наибольшей интенсивности света. Таким образом, наблюдатель будет видеть светящееся кольцо с угловым радиусом $\delta_{\min} = 22^\circ$.

Ответ: Причина возникновения малого гало – двукратное преломление световых лучей в ледяных кристаллах-призмах гексагональной формы. ($\$_{\max} = 13$ баллов).

Задача № 17. «Фантастический эксперимент с Солнцем и Землей»

Условие. Предположим, что в результате фантастического эксперимента на Солнце остались только протоны, а на Земле – только электроны. Во сколько раз возникшая сила электростатического взаимодействия будет больше их гравитационного взаимодействия до исчезновения других

частиц? Все необходимые численные данные возьмите из справочников. Задача является оценочной, поэтому можете считать, что количества протонов и нейтронов в среднем одинаковы, а другие элементарные частицы можете вообще не учитывать. (14 баллов).

Решение:

Прежде всего определим силу притяжения (обусловленную гравитационным взаимодействием). Согласно закону всемирного тяготения имеем

$$F_G = \frac{G \mathfrak{M}_{\oplus} \mathfrak{M}_{\odot}}{a_{\oplus}^2} = 3.543 \cdot 10^{22} \text{ Н.} \quad (49)$$

$G = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ – гравитационная постоянная, $\mathfrak{M}_{\oplus} = 5.974 \cdot 10^{24} \text{ кг}$ – масса Земли, $\mathfrak{M}_{\odot} = 1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$ – масса Солнца, $a_{\oplus} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$ – большая полуось земной орбиты (среднее расстояние Земли от Солнца).

Для определения силы электростатического взаимодействия - силы Кулона, необходимо определить суммарные электрические заряды Земли и Солнца.

Определим заряд Солнца. Как известно, Солнце состоит из водорода ($\chi_H = 73.46\%$), гелия ($\chi_{He} = 24.85\%$), кислорода ($\chi_O = 0.77\%$), углерода ($\chi_C = 0.29\%$), железа ($\chi_{Fe} = 0.16\%$), неона ($\chi_{Ne} = 0.12\%$), азота ($\chi_N = 0.10\%$) и других химических элементов с меньшими массовыми долями, которыми в дальнейшем будем пренебрегать (эти данные можно найти в астрономической литературе, в крайнем случае в электронной энциклопедии Wikipedia). По определению массовая доля вещества есть

$$\chi_i = \frac{\mathfrak{M}_i}{\mathfrak{M}_{\odot}} = \frac{m_{0i} N_i}{\mathfrak{M}_{\odot}} = \frac{\mu_i N_i}{N_A \mathfrak{M}_{\odot}} \Rightarrow N_i = \mathfrak{M}_{\odot} N_A \frac{\chi_i}{\mu_i}, \quad (50)$$

здесь \mathfrak{M}_i – масса i -го сорта вещества в теле Солнца, μ_i – его молярная масса, m_{0i} – масса одного атома данного химического элемента, N_i – число таких атомов в теле Солнца, $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – постоянная Авогадро. От атома i -го сорта остается после эксперимента только Z_i протонов, где Z_i – порядковый номер данного химического элемента в таблице Менделеева. Следовательно, суммарный заряд Солнца есть

$$Q_{\odot} = \sum_{i=1}^N q_p Z_i N_i = q_p \mathfrak{M}_{\odot} N_A \sum_{i=1}^N Z_i \frac{\chi_i}{\mu_i} = 1.662 \cdot 10^{38} \text{ Кл.} \quad (51)$$

где $q_p = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ – заряд протона. Значения параметров формулы (54) представлены в таблице 4.

Таблица 4

	Химический элемент						
	H	He	O	C	Fe	Ne	N
$\chi, \%$	73.46	24.85	0.77	0.29	0.16	0.12	0.10
Z	1	2	8	6	26	10	7
$\mu, \times 10^{-3} \text{ кг/моль}$	1	4	16	12	52	20	14

Некоторые свойства основных химических элементов Солнца (при определении молярной массы учтено равенство количеств протонов и нейтронов в ядре).

Замечание: для оценки заряда Солнца, в принципе, можно ограничиться учетом лишь водорода и гелия, поскольку лишь данные элементы определяют порядок искомой величины. Аналогично рассуждая (с учетом, что в нейтральном атоме количество протонов равно количеству электронов) можно определить заряд Земли:

$$Q_{\oplus} = \sum_{j=1}^M q_e Z_j N_j = q_e \mathfrak{M}_{\oplus} N_A \sum_{j=1}^M Z_j \frac{\chi_j}{\mu_j} = 5.694 \cdot 10^{32} \text{ Кл.} \quad (52)$$

где $q_e = -1.602 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд электрона.

Здесь мы учли, что основными элементами Земли являются железо ($\chi_{Fe} = 32.1\%$), кислород ($\chi_O = 30.1\%$), кремний ($\chi_{Si} = 15.1\%$), магний ($\chi_{Mg} = 13.9\%$), сера ($\chi_S = 2.9\%$), никель ($\chi_{Ni} = 1.8\%$), кальций ($\chi_{Ca} = 1.5\%$), и алюминий ($\chi_{Al} = 1.4\%$). Значения основных параметров формулы (52) представлены в таблице 5.

Таблица 5

	Химический элемент							
	Fe	O	Si	Mg	S	Ni	Ca	Al
$\chi, \%$	32.1	30.1	15.1	13.9	2.9	1.8	1.5	1.4
Z	26	8	14	12	16	28	20	13
$\mu, \times 10^{-3}$ кг/моль	52	16	28	24	32	56	40	26

Некоторые свойства основных химических элементов Земли (при определении молярной массы учтено равенство количеств протонов и нейтронов в ядре).

Следовательно, закон Кулона для Земли и Солнца можно представить в виде:

$$F_E = \frac{k Q_{\odot} |Q_{\oplus}|}{a_{\oplus}^2} = k q_p^2 N_A^2 \frac{m_{\odot} m_{\oplus}}{a_{\oplus}^2} \left[\sum_{i=1}^N Z_i \frac{\chi_i}{\mu_i} \right] \times \left[\sum_{j=1}^M Z_j \frac{\chi_j}{\mu_j} \right] = 3.806 \cdot 10^{58} \text{ Н.} \quad (53)$$

Следовательно, отношение указанных сил есть

$$\eta = \frac{F_E}{F_G} = \frac{k q_p^2 N_A^2}{G} \left[\sum_{i=1}^N Z_i \frac{\chi_i}{\mu_i} \right] \times \left[\sum_{j=1}^M Z_j \frac{\chi_j}{\mu_j} \right] = 1.074 \cdot 10^{36} \approx 10^{36}. \quad (54)$$

Ответ: $\eta = \frac{F_E}{F_G} \approx 10^{36}$. ($S_{\max} = 14$ баллов).

Задача № 18. «Светимость квазара ULAS J1120+0641»

Условие. Летом 2011 года международной группой исследователей был открыт *самый далекий квазар* – ULAS J1120+0641. Оцените светимость квазара, если известно, что кратчайшая вариация его блеска составляет $\Delta t = 4$ часа, расстояние до квазара составляет 12.9 млрд св. лет. Максимум светимости в спектре излучения квазара, наблюдаемого на эксперименте, приходится на длину волны $\lambda_{\max} = 10^{-7}$ м. Ответ представьте в Ваттах и в светимостях Солнца. **Примечание:** при решении задачи, возможно, окажутся полезными основные законы излучения абсолютно черного тела и формула релятивистского эффекта Доплера. (15 баллов).

Дано:

$\Delta t = 4$ часа,
 $r = 12.9$ млрд св.
 лет;
 $\lambda_{\max} = 10^{-6}$ м;

Найти:

$\eta - ?$

Решение:

Для определения светимости квазара воспользуемся известной формулой для светимости звезды:

$$L_q = 4\pi R_q^2 \sigma T_{\text{eff}}^4, \quad (55)$$

где R_q – радиус квазара, $\sigma = 5.670 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м² · К⁴) – постоянная Стефана-Больцмана; T_{eff} – эффективная температура поверхности квазара.

Для определения радиуса квазара учтем, что кратчайшая вариация его блеска непосредственно определяет его размеры. Действительно, допустим в момент времени t_1 в силу внутренних физических процессов светимость квазара по всей поверхности начала увеличиваться (например, в результате незначительного гравитационного сжатия), тогда наблюдатель это зафиксирует благодаря лучам пришедшим из точки A – ближайшей к наблюдателю (см. рис. 17), в последующие

моменты времени световые лучи с большей интенсивностью будет приходить с опозданием от других, более далеких точек поверхности квазара. Наконец, в момент времени t_2 придет луч из точки В (самой далекой от наблюдателя и доступной наблюдениям). В течение времени $\Delta t = t_2 - t_1$ освещенность, создаваемая квазаром у поверхности Земли будет плавно увеличиваться. Добиться меньшего времени изменения блеска невозможно (это противоречит теории относительности Эйнштейна), если мы предполагаем, что изменением светимости квазара "управляют" глобальные процессы.

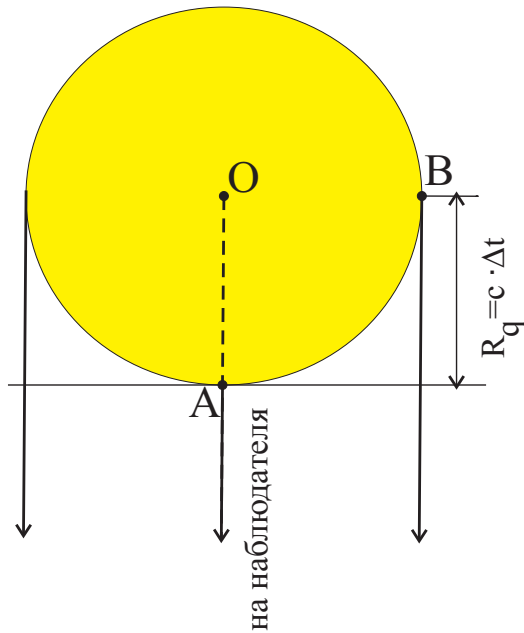


Рис. 17. К определению радиуса квазара.

Тогда радиус квазара есть

$$R_q = c \cdot \Delta t = 3 \cdot 10^8 \text{ км/с} \cdot 4 \cdot 3.6 \cdot 10^3 \text{ с} = 4.32 \cdot 10^{12} \text{ м.} \quad (56)$$

где $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ – скорость света в вакууме. Поскольку квазар – очень далекий объект, то для него справедлив закон Хаббла:

$$V_r = H \cdot r = 2.908 \cdot 10^8 \text{ м/с} = 0.970 \cdot c. \quad (57)$$

где $H = 73.5 \pm 3.2 \text{ км/(с} \cdot \text{Мпк)}$ – постоянная Хаббла (по данным эксперимента WMAP). Столь большая скорость удаления квазара от Земли должна порождать значительное спектральное смещение $z = \Delta\lambda/\lambda_0$ – относительное изменение длины какой-либо спектральной линии. Последний параметр можно непосредственно связать с лучевой скоростью удаления квазара V_r посредством релятивистской формулы Доплера (см. например учебное пособие "лабораторный практикум по астрофизике", Воробьева Э.Н., Филиппов Ю.П.):

$$\frac{V_r}{c} = \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1}, \quad (58)$$

откуда следует квадратное уравнение относительно z :

$$(z+1)^2(1-\beta) = (1+\beta), \Rightarrow z = \sqrt{\frac{(1+\beta)}{(1-\beta)}} - 1 = 7.12, \text{ где } \beta = \frac{V_r}{c}. \quad (59)$$

Зная параметр z можно определить истинную длину волны излучения, отвечающую спектру излучения квазара:

$$z = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_0}{\lambda_0}, \Rightarrow \lambda_0 = \frac{\lambda_{\max}}{1+z} = 1.231 \cdot 10^{-8} \text{ м.} \quad (60)$$

Далее воспользуемся законом смещения Вина для определения яркостной температуры T_B квазара на длине λ_0 :

$$\lambda_0 T_B = b = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}, \Rightarrow T_B = 235418 \text{ К.} \quad (61)$$

яркостная температура в видимом диапазоне (как и в случае звезд) должна быть по порядку величины равна эффективной температуре поверхности квазара T_{eff} , тогда будем полагать далее

$$T_{\text{eff}} \approx T_B.$$

Используя выражение для светимости Солнца, аналогичное (56), можно представить светимость квазара в виде:

$$\frac{L_q}{L_{\odot}} = \left(\frac{R_q}{R_{\odot}}\right)^2 \cdot \left(\frac{T_{\text{eff}}}{T_{\text{eff}\odot}}\right)^4 = 1.06 \cdot 10^{14}, \Rightarrow L_q = 1.06 \cdot 10^{14} L_{\odot} = 4.06 \cdot 10^{40} \text{ Вт,} \quad (62)$$

здесь $L_{\odot} = 3.846 \cdot 10^{26}$ Вт – светимость Солнца, $R_{\odot} = 6.961 \cdot 10^8$ м – его радиус, $T_{\text{eff}}^{\odot} = 5785$ К – эффективная температура поверхности Солнца.

Согласно данным эксперимента светимость квазара оценивается значением $6.3 \cdot 10^{13} L_{\odot}$, что весьма близко к полученной нами оценке.

Ответ: $L_q = 1.06 \cdot 10^{14} L_{\odot} = 4.06 \cdot 10^{40}$ Вт. ($\$_{\text{max}} = 15$ баллов).
